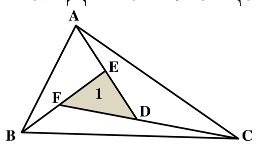
Условия задач

1. Пусть a и b — корни уравнения $x^2 - x - 2017 = 0$. Чему может быть равно $a^2 + b$? (укажите все варианты и докажите, что других нет).

2. На рисунке точки F, E и D — делят отрезки BE, AD и CF соответственно в отношениях 2:1 считая от вершин треугольника ABC. Площадь треугольника FED равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.



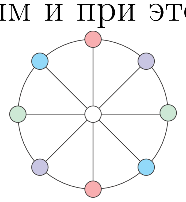
3. Последовательность положительных чисел (a_n) удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n^2 = (n-3) \cdot a_{n+1} + 2n + 3$ для всех $n \geq 1$. Найдите a_1.

4. Сколько существует 2017-значных чисел, таких, что при вычеркивании из них любой цифры получается 2016-значное число, являющееся делителем исходного числа?

5. Три бегуна стартовали из одной точки круговой дорожки длиной 1 в одном направлении. Они бегут с постоянными скоростями, и при этом их скорости различны. Будем говорить, что бегун *одинокий*, если расстояние по дорожке от него до каждого из остальных бегунов не меньше 1/3. Докажите, что каждый бегун однажды будет одиноким.

6. Можно ли выписать по кругу 2017 различных целых чисел так, чтобы их сумма была равна сумме произведений соседних на круге чисел?

7. В кружки на рисунке требуется вписать девять различных натуральных чисел так, чтобы произведение любой тройки чисел на каждом из четырех отрезков было одинаковым и при этом наименьшим из возможных. Чему будет равно это произведение?



8. В комнате было 2017 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. 1009 человек по очереди ушли из комнаты, и перед уходом каждый заявил: «После моего ухода лжецов в комнате останется больше, чем рыцарей». Сколько лжецов было в комнате изначально?

9. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $AB + CD = AC \cdot \sqrt{2}$ и $BC + DA = BD \cdot \sqrt{2}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

10. В ряд в порядке возрастания лежат карточки с числами от 1 до 100. За одну операцию можно поменять местами две соседние карточки. За какое наименьшее число операций мы сможем добиться того, чтобы никакие две карточки, числа на которых отличаются на 1, не были бы соседними?